V. Komplex Fibonacci sorozatok argumentuma, az argumentum és a szorzás kapcsolata

Kihagytunk most néhány hetet, a Fibonacci sorozatok belső argumentumánál tartottunk. A http://www.tar.hu/szolcs/Fibonacci/Peldak_V.xls táblát közben kiegészítettük egy komplex sorozatokra is működő munkalappal. Az argumentum levezetésének most – a komplex esetben – abból a formájából indulunk ki, mely szerint ha f_n nem szinguláris Fibonacci sorozat természetes indexelésű, továbbá g_n konjugált sorozata szintén természetes indexelésű, **és** képezzük tetszőleges n indexre a

$$\mu_n' = f_n / g_n \qquad \text{számot.}$$

$$\text{Ha } |\mu_n'| > 1, \text{ akkor legyen } \quad \mu_n' = g_n / f_n$$

Ezen feltételek mellett kiszámítva az

$$\Omega_n = arth(\mu_n') / ln(A)$$

mennyiséget, Ω_n számtani sorozatot alkot, melynek differenciája 1.

Ω_n és törtrésze - ω_n azonban összemossa a sorozatot és konjugáltját.

Magával a képzési móddal is összhangban van ez a dolog. A konjugált az eredeti sorozat „Fibonaccsis" értelemben vett „-1"-szerese, a normalizált Lucas sorozattal vett szorzat. A komplex számoknál is összemossa az argumentum a szám és annak -1-szerese számot, hiszen $\underline{\alpha} = arctg(\underline{b} / \underline{a})$, ahol $\underline{b}$ a képzetes - 'imaginárius' rész, $\underline{a}$ pedig a valós rész. $\underline{\alpha}$ szempontjából mindegy, hogy az $\underline{a}/\underline{b}$ hányadost vesszük, vagy a $-\underline{a}/-\underline{b}$ hányadost.

Nyilvánvaló, ha f_n komplex számok Fibonacci sorozata, akkor a konjugáltja is az, hányadosuk is komplex. Az *areatangens hiperbolikuszuk* is komplex. Vizsgáljuk meg a levezetésünket komplex esetre! (Általában véve a komplex esetek vizsgálatát úgy ítélem meg, hogy nem embernek való, meglehetősen bonyolult a nyomon követés.)

Definíció szerint:

$$arth(\mu_n') = (1/2)*ln((1+\mu_n')/(1-\mu_n')), \text{ feltéve: } |\mu_n'| < 1$$

Legyen μ_n' valós / képzetes felbontása: $\mu_n' = a+bi$, tudjuk továbbá, hogy $a^2 + b^2 < 1$

Vizsgáljuk meg, minek is kell a logaritmusát venni!

$$(1+a+bi)/(1-a-bi)$$

Szorozva a nevezőt is, számlálót is a nevező konjugáltjával – hogy valós értékű nevezőt kapjunk:

$$(1+a+bi)*(1-a+bi)/((1-a)^2+b^2)=$$

$$(1-a^2+(1+a)*bi+(1-a)*bi-b^2) \;/\; (1-2*a+a^2+b^2)=$$

$$(1-a^2 -b^2+2*bi) / (1-2*a+a^2+b^2)=$$

$(1-a^2 -b^2) / (1-2*a+a^2+b^2)$ a valós rész,

$2*bi / (1-2*a+a^2+b^2)$ a képzetes rész

Meg is kaptuk az „Aminek a logaritmusát kell venni” oszloppár képleteit a *http://www.tar.hu/szolcs/Fibonacci/Peldak_V.xls* „Komplex” munkalapjából. Most jön még egy nagy nokedli, amivel már többször fenyegetőztünk. (Egyelőre az utolsó.) Komplex számok természetes alapú logaritmusa.

Mit is értsünk a következő kifejezésen:

$$ln(a+bi)$$

Maradjunk a bevált formulánál; $ln(a+bi)$ alatt értjük azt a komplex számot, amelyre – mint kitevőre - emelvén a természetes alapú logaritmus alapszámát (e – t, $e=2,718...$) eredményül $a+bi$ -t kapunk.

Amit tudunk – vagy ha nem is tudunk, de fogadjuk el;

c valós konstans mellett; $c*e^{i\alpha} = c*cos(\alpha)+c*sin(\alpha)* i$

Vagyishát az Euler formula c konstanssal szorozva. Tehát keressük azt az $x+yi$ komplex számot, melyre igaz, hogy:

$$e^{x+yi} = a+bi$$

Innét egyenes az út (remélem). Látható, hogy $c=e^x$, és mehetünk tovább, mint forró kés a vajban.

Megkapjuk a „Maga a Fiperbolic” oszloppárt a

http://www.tar.hu/szolcs/Fibonacci/Peldak_V.xls

komplex munkalapjáról. Számomra zavarba ejtő az előjelváltós trigonometrikus képzetes rész. A valós rész hozza az egy lépés, eggyel növekvő dolgot, a képzetes rész pedig előjelváltósan konstans(nak látszik. Lehet, még visszatérünk rá, érdemes lenne megvizsgálni.

Láttuk, a szorzat normája a tényzők normájának szorzata. Még egy érdekes dolog jön; a szorzat argumentuma a tényezők argumentumának összege.

Legyen ugyanis f_n Fibonacci sorozat (s,t) felbontása $f_n = s_1*\sigma_n + t_1*\rho_n$. Legyen g_m Fibonacci sorozat felbontása $g_m = s_2*\sigma_m + t_2*\rho_m$. Ekkor a $h_k = f_k * g_k$ szorzat sorozatuk felbontása $h_n = (s_1*s_2*\sqrt{5})*\sigma_n - (t_1*t_2*\sqrt{5})*\rho_n$.

Irjuk fel a 0 – adik indexű mátrix interpretációk szorzatát az (s,t) felbontás alakjában, és végezzük el a szorzást !

		$s_2 /A - t_2 * A$	$s_2 + t_2$
		$s_2 + t_2$	$s_2*A - t_2 / A$
$s_1 /A - t_1*A$	$s_1 + t_1$	U	V
$s_1 + t_1$	$s_1*A - t_1 /A$	V	W

$$U = (s_1*s_2 / A^2 - s_1*t_2 - s_2*t_1 + t_1*t_2*A^2) +(s_1*s_2 + s_1*t_2 + s_2*t_1 + t_1*t_2) ;$$

$$U = s_1*s_2 / A^2 + s_1*s_2 + t_1*t_2*A^2 + t_1*t_2 ;$$

$$U = s_1*s_2*(1+1/ A^2) + t_1*t_2 *(1+A^2) ;$$

$$U = s_1*s_2* (A+1 / A) / A + t_1*t_2 * (A + 1 / A) * A ;$$

$$U = (s_1*s_2* \sqrt{5}) / A + (t_1*t_2 * \sqrt{5}) * A .$$

A következő elemre vonatkozóan:

$$V = (s_1 +t_1)*(s_2 /A - t_2*A) + (s_1*A - t_1 /A)*(s_2 + t_2) ;$$

$$V = (s_1*s_2 / A - s_1*t_2*A + s_2*t_1 / A - t_1*t_2*A) + (s_1*s_2*A+s_1*t_2*A - s_2*t_1 / A - t_1*t_2*A) ;$$

$$V = s_1*s_2 / A + s_1*s_2*A - t_1*t_2*A - t_1*t_2*A ;$$

$$V = s_1*s_2* \sqrt{5} - t_1*t_2 * \sqrt{5} .$$

Hasonlóan kiszámítható W értéke is. Meggyőződhetünk tételünk igazságáról, ha figyelmesen megnézzük a kapott eredményeket.

Vizsgáljuk most a szorzat sorozathoz tartozó ω_n mennyiséget ! Mint definiáltuk:

$$\omega_n = \{n + ln(v) / (2*ln(A)) \} = \{ ln(v) / (2*ln(A)) \} = \{ ln(| s_1*s_2 | / |t_1*t_2 |) / (2*ln(A)) \};$$

$$\omega_n = \{ ln(| s_1 | / |t_1 |) / (2*ln(A)) + ln(| s_2 | / |t_2 |) / (2*ln(A)) \} ;$$

Ha a tényezőkhöz tartozó ω_n mennyiségeket $\omega^{(1)}{}_n$ –nel és $\omega^{(2)}{}_n$ –nel jelöljük, akkor:

$$\omega_n = \{ \omega^{(1)}{}_n + \omega^{(2)}{}_n \} ;$$

A ω mennyiség az indextől független, ezért az index jelölése akár el is hagyható:

$$\omega = \{ \omega^{(1)} + \omega^{(2)} \} ;$$

Nyilvánvalóan igaz az állítás Ω_n mennyiségekre is, csak ez függ az indextől:

$$\Omega_{n+k} = \Omega^{(1)}{}_n + \Omega^{(2)}{}_k ;$$

Tehát a szorzat sorozathoz tartozó Ω az egyes sorozatokhoz tartozó Ω mennyiségek összege. Ismét egy analógia kerül elénk; a pozitív valós számok körében a szorzat logaritmusa a tényezők logaritmusának összegével megegyező. Még többet mondó az analógia a komplex számokkal; komplex számok szorzatának normája a tényezők normájának szorzata, a szorzat

„argumentuma” pedig a tényezők „argumentumának” összege. Csak míg ott az argumentum az inverz trigonometrikus függvények köréből kerül ki (a képzetes rész és a valós rész hányadosának arcus tangense), addig itt az inverz hiperbolikus függvények közül (a sorozat és konjugált sorozatának megfelelő indexű tagja hányadosának area tangens hiperbolikusza). A klasszikus Fibonacci sor, a Lucas sorozat és ezek konstansszorosainak argumentuma 0 , így ezen sorozatokat tarthatjuk tiszta „valós” sorozatoknak. Vannak még „valós” sorozatok, róluk a későbbiekben ejtünk szót. Mivel ez a sebtiben megfogalmazott „valós” jelző meglehetősen félrevezető, ezért célszerű szabatosabban definiálni ezt a fogalmat.